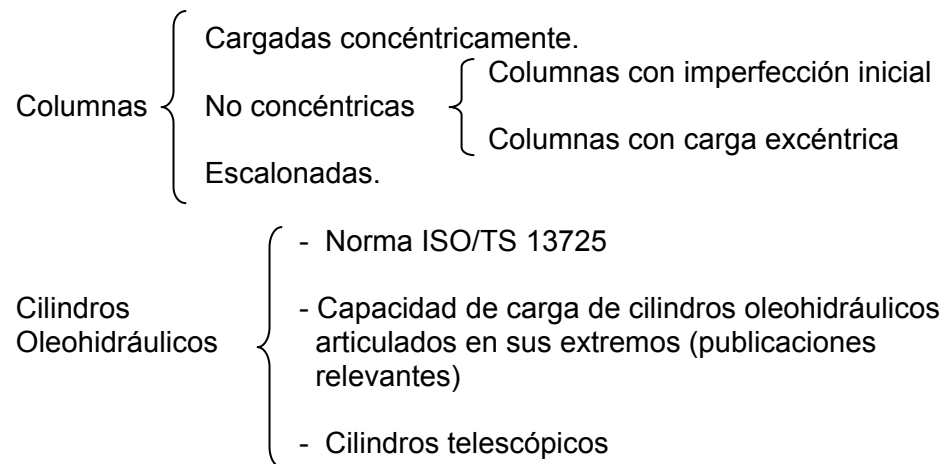


## 2. ESTADO DEL ARTE

Si queremos profundizar en el análisis de capacidad de carga de cilindros oleohidráulicos deberíamos analizar en detalle los conceptos implícitos en el fenómeno de pandeo de columnas (fenómeno de inestabilidad) y en el comportamiento real de elementos estructurales sometidos a cargas de compresión y flexión.

Ante la falta de un modelo eficaz para el cálculo de la capacidad de carga de los cilindros hidráulicos, la mayoría de fabricantes han optado por utilizar un modelo simple y muy conservador que se fundamenta en suponer que el comportamiento a pandeo de un cilindro hidráulico es equivalente al pandeo de una columna rígida de longitud igual a la longitud total del cilindro hidráulico y momento de inercia igual al momento de la sección transversal del vástago.

El presente capítulo se desarrollará de acuerdo con el siguiente esquema:



### 2.1 PANDEO DE COLUMNAS

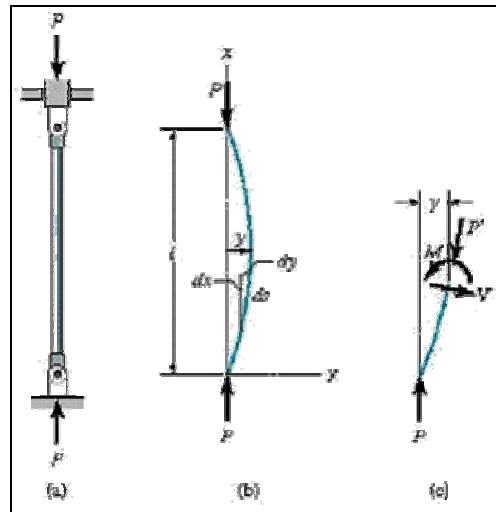
Euler (1744) fue el primero en estudiar el fenómeno del pandeo encontrando la carga crítica de una barra homogénea sometida a compresión. A partir de ese momento diversos autores han realizado estudios teóricos y experimentales en relación a este fenómeno. La Tabla 2.1 resume diversos trabajos en relación al pandeo de columnas.

año	Autor	Publicación	Síntesis resultados
1744	EULER (1707-1783)	"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes...", apéndice I, "De curvis elasticis," Bousquet, Lausana y Ginebra, 1744.	Estudios pioneros en pandeo; determina la carga crítica de columnas ideales. $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ , y analiza bajo distintas condiciones de soporte.
1845	A.H.E Lamarle (1806-1875)	"Mémoire sur la flexion du bois," <i>Annales des Travaux Publiques de Belgique</i> , parte 1, vol. 3, 1845, págs. 1-36.	Señala que la fórmula de Euler se debe usar para relaciones de esbeltez mayores a cierto límite, y que debe experimentarse para columnas con relaciones menores.
1889	A.G. Considère (1841-1914)	"résistance des pièces comprimées," <i>Congrès international des Procédés de Construction</i> , Paris. Septiembre 9-14, 1889.	Primeros ensayos en columnas. Las tensiones sobre el lado cóncavo de la columna se incrementan con $E_t$ y las tensiones sobre el lado convexo disminuyen con $E$ . Mostró la no aplicabilidad de Euler al pandeo inelástico y estableció que el módulo reducido tenía un valor entre $E$ y $E_t$ .
1889	F. Engesser 1848-1931	"Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe," <i>Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen</i> , vol. 35, No.4, 1889, págs. 455-462.	Sugiere la teoría del módulo de elasticidad tangente. Denota el módulo tangente como $T = d\sigma/d\varepsilon$ y propone usar $T$ en lugar de $E$ en la ecuación de Euler para carga crítica. La teoría de módulo tangente se considera también teorema de Engesser.
1895		"Knickfragen," <i>Schweizerische Bauzeitung</i> , vol. 25, No. 13, marzo 30/1895, págs. 88-90.	
1895	F.S. Jasinsky 1856 - 1899	"Noch ein Wort zu den 'Knickfragen,'" <i>Schweizerische Bauzeitung</i> , vol. 25, No. 25, 22 junio/1895, págs. 172-175.	Señala que la teoría de Engesser era incorrecta; hace notar el trabajo de Considère y presenta la teoría del módulo reducido. Establece que el módulo reducido no podía calcularse a nivel teórico.
1895	F. Engesser	"Ueber Knickfragen," <i>Schweizerische Bauzeitung</i> , vol. 26, No. 4, Julio 27, 1895, págs. 24-26.	Reconoce el error en teoría del módulo tangente y mostró cómo calcular el módulo reducido para cualquier sección transversal. Teoría del módulo reducido se conoce también como teoría de Considère-Engesser.
1908	Theodore von Kármán (1881 - 1963)	"Die Knickfestigkeit gerader Stäbe," <i>Phisikalische Zeitschrift</i> , vol. 9, No. 4, 1908, págs. 136-140	Presenta teoría del módulo reducido (independiente de los demás). Obtiene las fórmulas para $E_r$ de secciones rectangulares e idealizadas doble T (sin alma). Involucra efectos de excentricidades de la carga de pandeo y muestra que la carga máxima disminuye con rapidez con el aumento de la excentricidad.
1910		"Untersuchungen über Knickfestigkeit," <i>Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, verein Deutscher Ingenieure</i> , berlin, Heft 81, 1910.	
1956		<i>Collected Works of Theodore vonn Kármán</i> , vols.I-IV, Butterwoths Scientific Publications, londres, 1956.	
1946	Shanley (1904-1968)	"The column paradox," <i>Journal of the Aeronautical Sciences</i> , vol. 13, No. 12, diciembre 1946, pág 678.	Señala paradojas lógicas en teoría de módulo tangente y módulo reducido y propone una teoría para resolverlas.
		"Inelastic column theory," <i>ibid.</i> , vol.14 No. 5, mayo de 1947, págs.261-267.	Presenta análisis adicionales y resultados en pruebas de columnas que apoyan su teoría.

Tabla 2.1. Síntesis histórica, estudios en pandeo de columnas [1]

### 2.1.1 Columnas cargadas concéntricamente

Para entender por qué las columnas se pandean, primero es necesario entender los regímenes de equilibrio. Cuando la carga axial concéntrica  $P$  aplicada a una columna (Fig. 2.1) tiene un valor pequeño, la columna permanece perfectamente recta y sufre compresión axial directa. Las únicas tensiones son las de compresión uniforme ( $\sigma = P/A$ ). La columna está en **equilibrio estable**, lo que significa que vuelve a su posición recta después de una perturbación.



**Fig. 2.1. Columna con extremos articulados sometida a compresión, a) ensamble; b) forma de la deformación; c) carga actuante.**

Al incrementar gradualmente la carga axial  $P$ , se alcanza una condición de **equilibrio neutro** en que la columna puede tener una forma flexionada; el valor correspondiente a la carga, es la carga crítica  **$P_{cr}$** . Con esta carga la columna puede sufrir pequeñas deflexiones laterales sin cambios en la fuerza axial; una pequeña carga lateral producirá una forma flexionada que no desaparece cuando se elimina la carga lateral. La carga crítica puede mantener la columna en equilibrio ya sea en posición recta o en una posición un tanto flexionada.

A valores mayores de la carga, la columna es **inestable** y puede fallar por pandeo; es decir por flexión excesiva. Para el caso ideal, la columna estará en equilibrio en posición recta aún cuando la carga axial  $P$  sea mayor que la carga crítica; sin embargo, la mínima perturbación ocasionará que la columna se flexione en sentido lateral. Una vez esto pasa, las deflexiones aumentan de inmediato y la columna falla por pandeo. En resumen:

Si  $P < P_{cr}$  la columna está en equilibrio estable en posición recta.

Si  $P = P_{cr}$  la columna está en equilibrio neutro en posición recta o ligeramente flexionada.

Si  $P > P_{cr}$  la columna está en equilibrio inestable en posición recta y se pandeará ante la más pequeña perturbación.

### a) Pandeo Elástico

En la Fig. 2.1 se presenta una columna cargada concéntricamente con sus extremos articulados. En una columna como ésta sus extremos se mantienen en posición, pero son libres de girar. Suponga que la columna es recta inicialmente y que la carga es concéntrica, como se representa en la Fig. 2.1(a). En la Fig. 2.1(c) se muestra un diagrama de cuerpo libre de las cargas que actúan sobre la columna.

El comportamiento de columnas esbeltas cargadas concéntricamente fue estudiado hace más de 200 años por Leonhard **Euler**, quien estableció, a partir de la solución de la ecuación diferencial de momento flector para la columna en el estado de equilibrio neutro, la carga límite a partir del cual estos elementos fallan por pandeo, así:

$$\text{Ecuación de momento flector (Fig. 2.1):} \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = -P \cdot y \quad (2.1)$$

Haciendo  $k^2 = P/EI$ , se tiene  $y'' + k^2 y = 0$ , cuya solución tiene la forma:

$$y = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (2.2)$$

De condiciones de contorno en los extremos de la columna:  $y(0) = 0$ ,  $y(L) = 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \quad y = C_1 \sin kx \\ C_1 \sin kL &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

La ecuación no trivial conocida como ecuación de pandeo es entonces:  $\sin kL = 0$ .

La solución de interés será  $kL = n\pi$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{De esta forma se tiene} \quad P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$



La menor carga crítica para una columna con extremos articulados (Fig. 2.1(a))

es entonces:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.5)$$

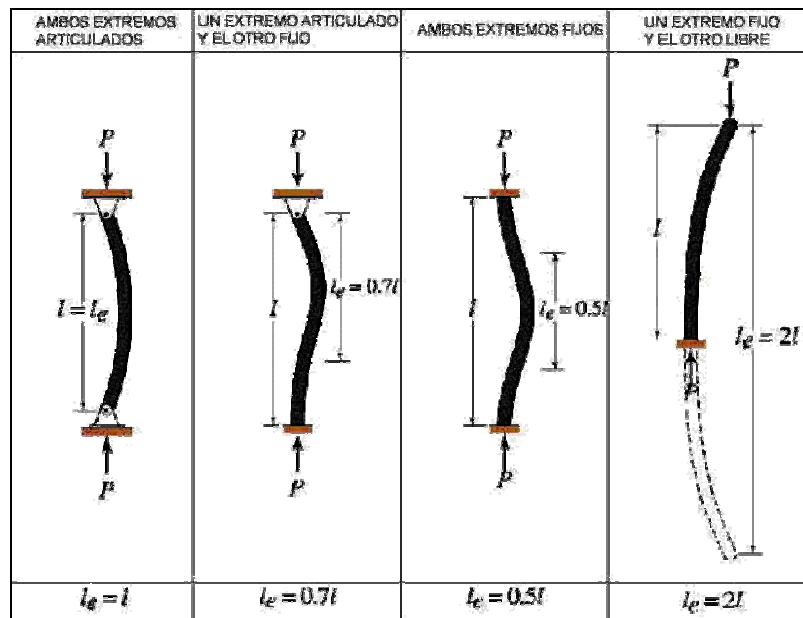
En la práctica se encuentran otras condiciones de extremos como empotrados y libres. Las cargas críticas para columnas con diferentes tipos de condiciones en los extremos se determinan con la ecuación diferencial de la curva de deflexión, de igual forma que el caso analizado anteriormente.

Al aplicar las condiciones de contorno respectivas y resolviendo en cada caso, se encuentra que una expresión general de la carga crítica para todas las columnas es:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (2.6)$$

Conocida como la carga crítica de Euler. La longitud equivalente de una columna es la distancia entre puntos de inflexión (puntos de momento cero) en su curva de deflexión, suponiendo que la curva se extiende (en caso necesario) hasta que se alcanzan puntos de inflexión (Fig. 2.2).

La Fig. 2.2 muestra la longitud equivalente  $L_e$ , para columnas con diversos tipos de condiciones de soporte.



**Fig. 2.2. Longitud equivalente para columnas con distintas condiciones en los extremos**

La Tabla 2.2 resume de una manera sintética, la forma de obtención de estas longitudes equivalentes, de acuerdo a las condiciones de soporte, desarrollando las formulaciones a partir de las ecuaciones de equilibrio en cada caso.

Con frecuencia interesa definir la tensión crítica de una columna, que en este caso definiremos como tensión de Euler  $\sigma_E$  y viene dada por la ecuación (2.7).

$$\sigma_E = \sigma_{cr} = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left( \frac{L_e}{r_g} \right)^2} \quad (2.7)$$

En donde la relación  $\frac{L_e}{r_g}$  se conoce como la **relación de esbeltez** y  $r_g = \sqrt{I/A}$  el radio de giro de la columna. La tensión crítica  $\sigma_{cr}$  es una tensión promedio en la columna, momentos antes de que pandee. Esta tensión es elástica y, para un módulo de elasticidad constante, es aplicable solo hasta el límite proporcional del material.

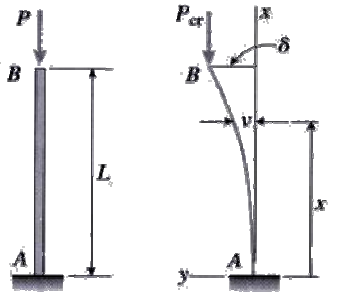
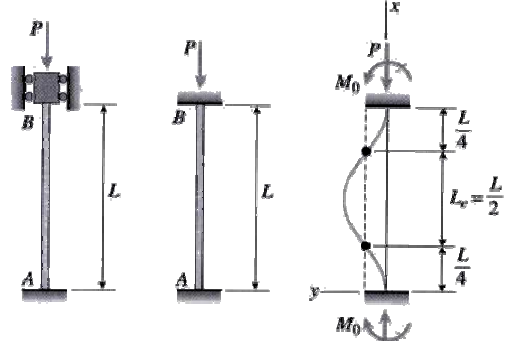
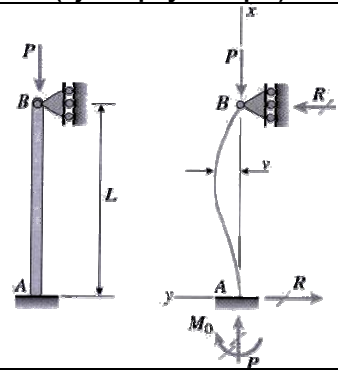
	Empotrado - libre (fijo-libre)	Empotrado - empotrado (fijo-fijo)	Empotrado - articulado (fijo - apoyo simple)
Esquema  Para todos: $k^2 = P/EI$			
Momento flector a una distancia x de la base	$M = P(\delta - y) = Ely''$	$M = -Py = Ely''$	$M_0 = RL$ $M = M_0 - Py - Rx = -Py + R(L - x) = Ely''$
Ecuación diferencial	$y'' + k^2y = k^2\delta$	$y'' + k^2y = 0$	$y'' + k^2y = \frac{R}{EI}(L - x)$
Solución general $v = v_H + v_P$	$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + \delta$	$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx$	$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + \frac{R}{P}(L - x)$
Condiciones de contorno	$y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = \delta$	$y'(0) = 0, y'(L/2) = 0$	$y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0$
Expresiones generadas	$C_2 = -\delta, C_1 = 0$ $\delta \cos kL = 0$ $\cos kL = 0$	$C_1 = 0, -kC_2 \operatorname{sen} kL/2 = 0$	$C_2 + RL/P = 0, C_1k - R/P = 0, C_1 \tan kL + C_2 = 0$ $C_1kL + C_2 = 0, \text{ o } C_2 = -C_1kL$ $kL = \tan kL$
Solución	$kL = \frac{n\pi}{2}, n = 1, 3, 5, \dots$	$kL/2 = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$	$kL = 4.4934$
Carga crítica mínima (n=1)	$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_E = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_E = \frac{2.046\pi^2 EI}{L^2}$
Longitud equivalente $L_e$	$L_e = 2L$	$L_e = 0,5L$	$L_e = 0,7L$

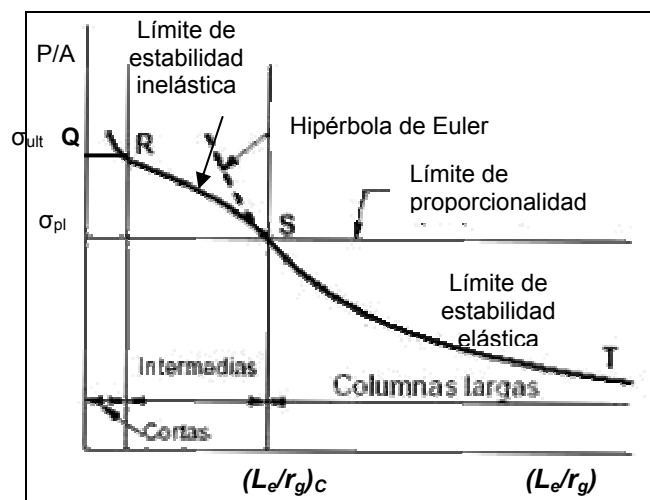
Tabla 2.2 Determinación de las longitudes equivalentes de columnas según condiciones en extremos

## b) Pandeo Inelástico

El pandeo inelástico ocurre cuando las columnas pasan del límite proporcional del material. La curva o hipérbola de Euler (Fig. 2.3) es válida solo en la región ST, donde la tensión está debajo del límite proporcional del material  $\sigma_{pl}$ . El valor de relación de esbeltez arriba de la cual la curva de Euler es válida se obtiene igualando la tensión crítica (2.7) a la tensión proporcional  $\sigma_{pl}$ . Así la relación de esbeltez crítica está dada por (2.8).

$$\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pl}}} \quad (2.8)$$

Las columnas cortas (Fig. 2.3), fallan por fluencia y aplastamiento del material sin que intervengan consideraciones de pandeo o estabilidad. En tal caso, se define una tensión de compresión última  $\sigma_{ult}$  como la tensión de falla del material, la cual establece un límite de resistencia (línea QR). Las columnas intermedias (RS) fallan por pandeo inelástico, lo cual significa que las tensiones máximas están arriba del límite proporcional cuando se presenta el pandeo. Como se rebasa el límite proporcional la pendiente de la curva tensión - deformación es menor que el módulo de elasticidad de la zona proporcional  $E$ . Las columnas largas (ST) fallarán por pandeo elástico o pandeo de Euler (2.8).



**Fig. 2.3. Comportamiento de la carga de Euler en función de la relación de esbeltez**

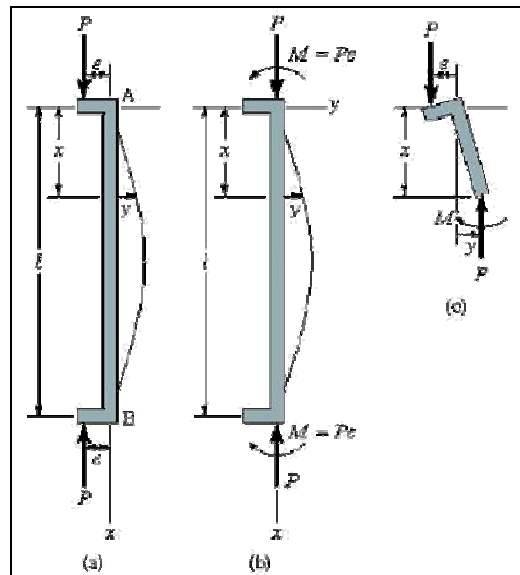
En la zona inelástica del material, la tensión crítica (2.7) puede ser calculada modificando el módulo de elasticidad  $E$ . En esta zona se aplican varias teorías[1]

como del módulo tangente, la cual define un nuevo valor  $E_t$  como  $d\sigma/d\varepsilon$  de la curva tensión-deformación del material. Este valor por consiguiente no es constante y es menor que el módulo elástico  $E$ . De igual manera se plantean otras teorías como del módulo reducido  $E_r$ , donde  $E_t < E_r < E$ , y teoría de Shanley (descritas con suficiencia en referencia [1]).

### 2.1.2 Columnas no concéntricas<sup>1</sup>

#### 2.1.2.a Columnas con excentricidad en la aplicación de la carga

Las aplicaciones de las columnas rara vez tienen la carga aplicada alineada de manera coincidente con el eje centroidal de la sección transversal. A la distancia entre los dos ejes se le denomina excentricidad y se designa como  $e$  (Fig. 2.4.a).



**Fig. 2.4. Columna cargada excéntricamente. a) excentricidad, b) momento flexionante, c) diagrama del cuerpo libre a través de una sección arbitraria**

En la Fig. 2.4(a) se muestra una columna con los extremos articulados, sujeta a unas fuerzas que actúan a una distancia  $e$  de la línea central de la columna no deformada. Se supone que a la columna se le aplica una carga a una distancia corta excéntrica, desde el centroide de la sección transversal. Esta carga en la columna es estáticamente equivalente a la carga axial y al momento flexionante  $M = P e$ , como se presenta en la Fig. 2.4(b). Cuando se consideran columnas

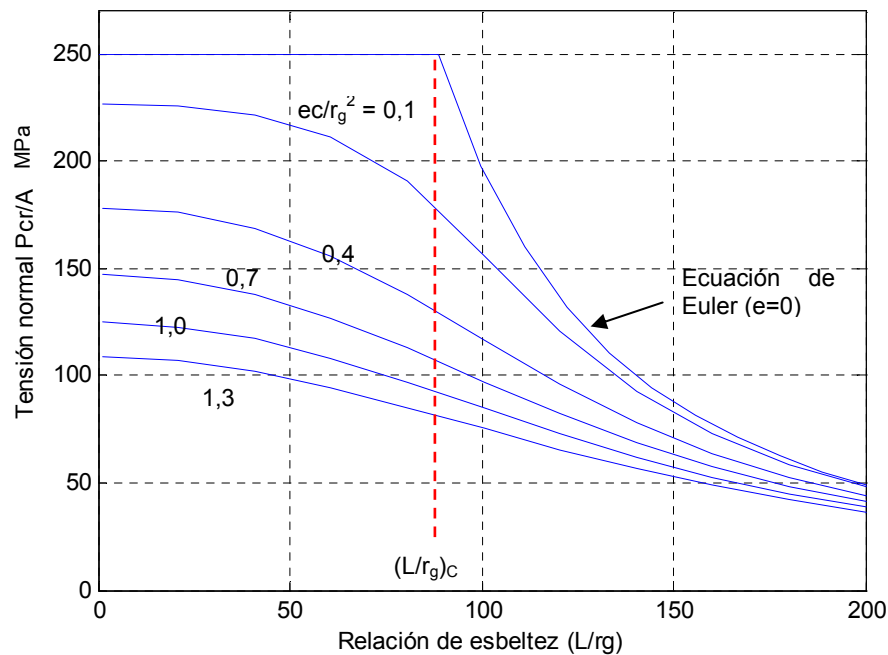
<sup>1</sup> No concéntricas se refiere a columnas cuya línea de acción de la carga aplicada no coincide inicialmente, con el centroide de la sección transversal.

cargadas concéntricamente se suponen deflexiones pequeñas y un comportamiento elástico lineal. La tensión máxima de esta columna está definida por (2.9) [1].

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot c}{r_g^2} \sec \left( \frac{l}{2r_g} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es conocida como **fórmula de la secante**. El parámetro  $e \cdot c / r_g^2$  se denomina razón de excentricidad.

En la Fig. 2.5 se muestra el efecto de la razón de esbeltez sobre la tensión normal  $P/A$  para una columna cargada excéntricamente [expresión (2.9)]. Las curvas de la figura indican que las diferencias en la razón de excentricidad tienen un efecto significativo sobre la tensión en la columna cuando la razón de esbeltez es pequeña. Por otro lado, las columnas con grandes razones de esbeltez tienden a fallar en la carga de Euler sin importar la razón de excentricidad.



**Fig. 2.5. Variación de la tensión con la relación de esbeltez para distintas razones de excentricidad ( $E = 2 \times 10^{11}$  Pa y  $\sigma_{\max} = 250$  MPa).**

Las curvas registradas corresponden a una columna de diámetro 30mm cuyas excentricidades son 0,375 – 1,5 – 2,625 – 3,75 – 4,875 mm respectivamente. La tensión normal graficada corresponde a la relación  $P_{cr}/A$ . Esta carga  $P_{cr}$  en este

caso genera una tensión máxima de 250 MPa. Para excentricidad nula (carga concéntrica) corresponde la ecuación de Euler. Otros autores han planteado expresiones para el caso de columnas cargadas excéntricamente.

Walker [7] propone para columnas articuladas en sus extremos, una expresión para el cálculo de la tensión crítica  $P_{cr}/A$  [ $\sigma_{cr}$  en (2.10)] donde  $P_{cr}$  generaría en la columna una tensión de fluencia  $\sigma_y$ .

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \xi} \left\{ 0.5 \left[ \sigma_y + (1 + \xi) \sigma_E \right] - \sqrt{0.25 \left[ \sigma_y + (1 + \xi) \sigma_E \right]^2 - \sigma_y \sigma_E} \right\} \quad (2.10)$$

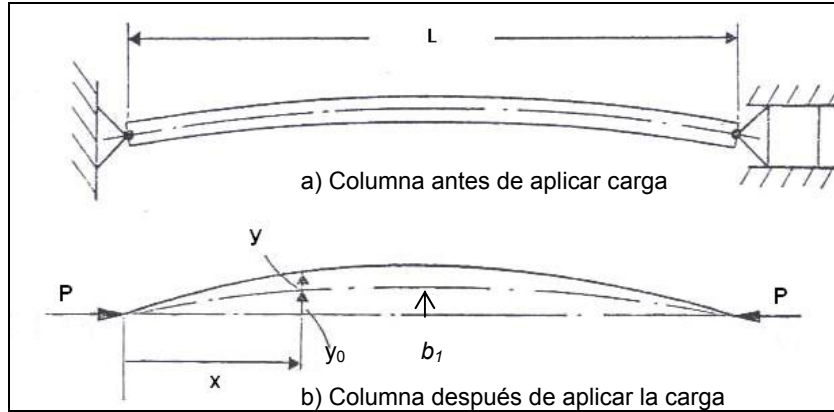
donde  $\xi = e.c/r_g^2$ ,  $\sigma_E$  es la tensión de Euler y  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia del material.

### 2.1.2.b Columnas con imperfección inicial (Fig. 2.6)

De igual manera Walker [7] plantea la expresión (2.11) para la tensión  $\sigma_{cr}$ , considerando que las columnas tienen una imperfección inicial máxima  $b_1$  (Fig. 2.6) (antes de ser cargadas).

$$\sigma_{cr} = 0.5 \left[ \sigma_y + (1 + \eta) \sigma_E \right] - \sqrt{0.25 \left[ \sigma_y + (1 + \eta) \sigma_E \right]^2 - \sigma_y \sigma_E} \quad (2.11)$$

donde  $\eta = \frac{b_1 c}{r_g^2}$

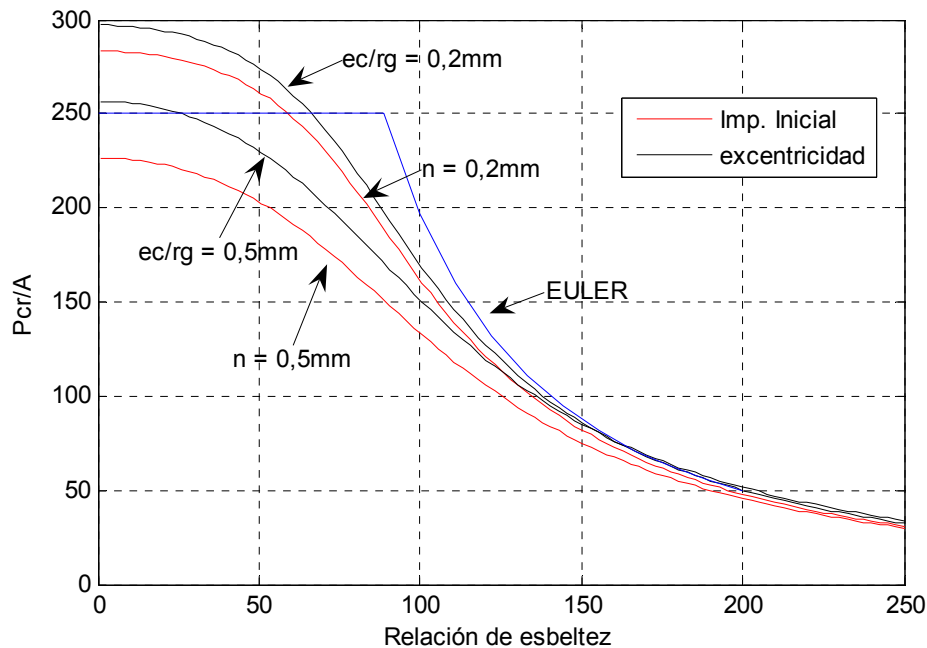


**Fig. 2.6 Columna con imperfección inicial.**

Walker [7] afirma que para otras condiciones de soporte se podrán emplear las ecuaciones anteriores, cambiando la longitud equivalente correspondiente.

La Fig. 2.7 presenta comparativamente las curvas de Walker [7] con relación a Euler, involucrando excentricidad (2.10), e imperfección inicial (2.11) con variaciones de  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente. Por efectos comparativos se ha tomado

como tensión admisible en todas las curvas, la tensión de fluencia, con un valor de 340MPa (dato razonable para un acero común).



**Fig. 2.7. Efectos de la excentricidad e imperfección inicial en columnas con relación a Euler según formulaciones de Walker [7].**  
Curvas ecuaciones (2.10) y (2.11), con  $\eta$  y  $\xi = 0.2$  y  $0.5$

Para  $\eta = \xi = 0$ , se genera la carga de Euler, en donde la relación de esbeltez crítica (límite de aplicación de Euler) lo define la tensión proporcional:  $\pi \sqrt{E/\sigma_{pl}}$ .

Para los mismos valores de  $\eta$  y  $\xi$ , ó lo que es lo mismo  $b_1$  y  $e$ , a una carga aplicada, la Fig. 2.7 muestra que la imperfección inicial genera un efecto más crítico sobre la columna que la excentricidad. Con el aumento de ambos parámetros, es notable el efecto desfavorable sobre la capacidad de carga de la columna (La carga crítica disminuye).

La Tabla 2.5 resume las formulaciones planteadas por diversos autores para la tensión crítica  $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$  en función de la relación de esbeltez de una columna de 30mm de diámetro y las compara mediante un gráfico. Para efectos comparativos, las curvas de la secante son determinadas con base en una tensión admisible equivalente a la tensión de fluencia. Los valores de tensiones tomados son:  $\sigma_Y = 340$  MPa,  $\sigma_{pl} = 250$ MPa.



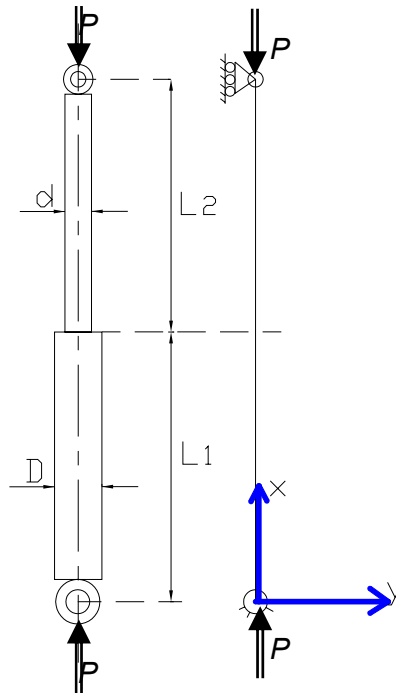
Autor	Expresiones para tensión crítica	Rango de aplicación	Curvas Resultado de análisis teóricos
EULER	$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$	Elástico - lineal $\frac{L_e}{r_g} > \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c$	
Secante (Timoshenko [1])	$\sigma_{pl} = \sigma_Y = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot c}{r_g^2} \sec \left( \frac{l}{2r_g} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$	Elástico e inelástico	
Walker [7] (con deformación inicial)	$\sigma_{cr} = 0.5 [\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E] - \sqrt{0.25 [\sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E]^2 - \sigma_Y \sigma_E}$ $\eta = \frac{b_1 c}{r_g^2}, \quad b_1: \text{deflexión inicial}$	Elástico e inelástico	
Walker [7] (con carga excéntrica)	$\sigma_{cr} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) \xi} \left\{ \frac{0.5 [\sigma_Y + (1 + \xi) \sigma_E]}{-\sqrt{0.25 [\sigma_Y + (1 + \xi) \sigma_E]^2 - \sigma_Y \sigma_E}} \right\}$ $\xi = \frac{ec}{r_g^2}, \quad e: \text{excentricidad de carga}$	Elástico e inelástico	
Módulo tangente [1]	$\sigma_{cr} = \sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad E_t < E \quad \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$	No lineal $\frac{L_e}{r_g} < \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c$	
Módulo reducido [1]	$\sigma_{cr} = \sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad E_t < E_r < E \quad \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$	No lineal $\frac{L_e}{r_g} < \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c$	

Tabla 2.5 Formulaciones basadas en teorías y su rango de aplicación.

### 2.1.3 Columnas escalonadas (con cambio de sección).

Son varios los autores que han planteado el caso de columnas de sección variable, articulada en sus extremos. (Timoshenko [2], Courbon [8]).

Supóngase una columna de sección variable con apoyos simples (Fig. 2.8) sometida a carga axial.



**Fig. 2.8. Columna de sección variable**

Planteando las ecuaciones de la elástica para ambas secciones y aplicando las condiciones de contorno correspondientes, los autores han obtenido la expresión (2.12) para la carga crítica de pandeo.

$$\frac{\tan(k_1 L_1)}{k_1} + \frac{\tan(k_2 L_2)}{k_2} = 0 \quad (2.12)$$

Donde  $k_1 = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI_1}}$        $k_2 = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI_2}}$

$L_1$  : Longitud de la sección de diámetro mayor.

$I_1$  : Momento de inercia de la sección transversal de diámetro mayor.

$L_2$  : Longitud de la sección de diámetro menor.

$I_2$  : Momento de inercia de la sección transversal de diámetro menor.

$E$  : Módulo de elasticidad del material de la columna (en este caso, supuesto constante para toda la columna).

#### 2.1.4 Estudios experimentales en pandeo de columnas

Si bien los conceptos teóricos son importantes para entender el comportamiento de las columnas, el diseño práctico de columnas debe tomar en cuenta factores no considerados en la teoría; por ejemplo, las columnas de acero siempre contienen tensiones residuales producida por sus procesos de fabricación. Estas tensiones varían considerablemente en diferentes partes de la sección transversal, de manera que el nivel de tensión requerido para producir la fluencia varía sobre toda la sección transversal.

Ya en 1920 se tenían más de 400 referencias de estudio de pandeo entre teórico y experimental [20]. Diversos autores han desarrollado a partir de esa fecha, una serie de planteamientos con base en pruebas experimentales. A continuación se citan algunos [3].

Petrus van Musschenbroek (1729) [19] determinó experimentalmente que la carga de pandeo de una columna es inversamente proporcional al cuadrado de su longitud, resultado que mas tarde fue deducido teóricamente por Euler (1744).

Von Kármán y Prandtl (1907-10) [21] en su disertación doctoral se sugiere 3 grupos de imperfecciones de acuerdo a sus efectos, estudiados durante el siglo 20 (Tabla 2.6).

Efectos	Imperfecciones
Excentricidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Excentricidad de carga</li> <li>• Variaciones en el módulo de elasticidad</li> <li>• Desigualdad en forma y área de sección transversal</li> <li>• No homogeneidad del material</li> </ul>
Curvatura Inicial	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Variación en módulo elástico.</li> <li>• Curvatura Inicial</li> </ul>
Reducción en Resistencia de materiales	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tensión residual</li> <li>• No homogeneidad del material</li> <li>• Fallas y defectos locales</li> </ul>

**Tabla 2.6. Imperfecciones en una prueba de pandeo y sus efectos**

Para el estudio de la excentricidad Kármán empleó valores de  $e = \text{Long de columna}/70$  y  $L/150$ . Kármán dio importancia a la excentricidad. Trabajó sobre una máquina de pruebas a compresión de 150 T con rango de longitud de 1 m. Empleó probetas con sección transversal del orden de 20 mm x 30 mm. Efectuó pruebas con no más del 20% de la capacidad de la máquina. Esto aseguraba una relativa rigidez de la configuración de la prueba.

En los 60, Kármán diseña una “fijación” que facilita la colocación exacta de la línea de centro de la columna sobre la línea de carga. Permitió el ajuste de posición de la columna bajo carga generando más exactitud de centrado.

Existían dos fuentes de error:

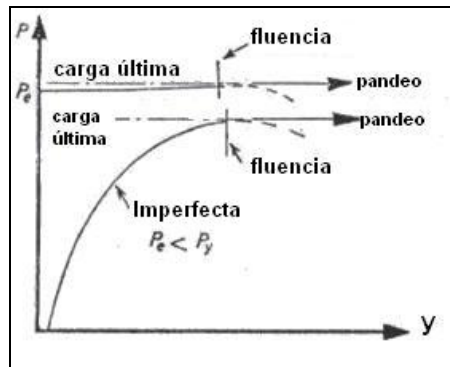
1. Inclusión del fijador rígido en la longitud efectiva.
2. Fricción de bordes filosos en sus bases. Puede incrementar la carga de pandeo medida. Sus resultados en zona elástica se desviaron de *Euler* en menos de 1 – 1.5%, el error no es significativo.

Kármán confirmó que el comportamiento de pospandeo es importante para entender el comportamiento de pandeo.

Para columnas largas, según curvas obtenidas, el comportamiento elástico previsto teóricamente de carga constante con incremento de deflexión es comprobado experimentalmente.

Para columnas cortas, el comportamiento difiere. La carga disminuye muy significativamente con incrementos de deflexión debido a efectos inelásticos. Los efectos inelásticos fueron su principal interés y han sido hasta el presente, el interés de estudio del pandeo.

Walker (1954) [7] realiza pruebas sobre columnas las cuales mostraron que hay una carga última, más allá de la cual la columna no puede sostener un incremento de carga. La Fig. 2.9 indica esquemáticamente que esta carga última es en efecto la carga de pandeo para una columna real, ya que en esta carga un ‘leve golpe’, puede causar cambiar a otra posición bruscamente deformada, con la misma carga.



**Fig. 2.9. Carga aplicada vs deflexión lateral (pruebas experimentales)**

Pruebas experimentales también mostraron que para una columna esbelta (es decir  $L_e/r_g > 150$  en una columna de acero estructural típico) la carga última es solo ligeramente mas grande que la carga de fluencia, pero una columna poco esbelta ( $L_e/r_g < 50$ ) hecha de un material dúctil tiene una carga última que puede ser significativamente mas grande que esta carga (*fluencia* en la figura).

Robertson (1925) [22], (citado por Walker [7]) observó que dada la magnitud de la imperfección en una columna, es posible calcular la tensión crítica (2.11), pero en la práctica hasta que la columna sea construida, la imperfección real no puede ser determinada, y por supuesto, esto es demasiado tarde para influenciar los procesos de diseño de la columna. Para vencer esta dificultad, han sido dirigidas investigaciones hacia la determinación de la variación estadística en columnas experimentales, de las imperfecciones causadas por varios métodos de manufactura.

En 1925 Robertson determina que si la magnitud del parámetro  $\eta$  en (2.11) tenía un valor  $\eta = 0.003L/r_g$ , entonces la curva resultante describía muy bien el comportamiento de un gran número de pruebas de columnas articuladas en sus extremos. La curva generada es experimental y el valor  $\eta$  no necesariamente tiene relación con la deformación inicial. Esta es conocida como la curva de Perry-Robertson.

J. Dutheil (Walker [7]) propuso que la relación  $\eta = \frac{0,3}{\pi^2} \frac{\sigma_Y}{E} \left( \frac{L}{r_g} \right)^2$  en la expresión (2.11) generaba una mejor descripción de los valores más bajos de las cargas últimas de las columnas.

Von Tetmajer (1903) [23] concuerda con la experimentación, en que la fórmula de Euler sólo es útil para valores de esbeltez ( $\lambda$ ) mayores que 100 (levemente mayores al radio de esbeltez crítico). Para  $\lambda$  menores que 100, Tetmajer de acuerdo con la experimentación observó que cargando hasta la rotura piezas de  $\lambda$  variable, los puntos del diagrama  $\sigma_{cr} = f(\lambda)$  se encontraban muy aproximadamente sobre una línea recta, llamada **recta de Tetmajer** (ver Tabla 2.7).

Para el acero, la recta de Tetmajer corta el eje de ordenadas  $\lambda = 0$  en el punto correspondiente a la tensión comprendida entre 280 y 300 MPa (tensión de rotura, en este caso acero estructural). Como este valor sobrepasa el límite elástico  $\sigma_{Elas} = 250$  MPa, se limita la recta Tetmajer al valor de la tensión límite de elasticidad, al que corresponde  $\lambda = 60$ .

La fórmula de Tetmajer llamada también de la línea recta, para el acero tiene entonces la forma:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{Rot} - a \cdot \lambda \quad (2.13)$$

Donde  $a$  es un coeficiente numérico deducido por las condiciones límites. El diagrama se cierra con una línea horizontal desde  $\lambda = 0$  a  $\lambda = 60$ . Para el acero dulce por ejemplo, con  $\lambda < 100$ ,  $\sigma_{cr} = 300 - 0,8 \cdot \lambda$ .

Rankine, con base en experimentación propone, para cualquier valor de  $\lambda$ , que:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{adm}}{1 + a \cdot \lambda^2} \quad (2.14)$$

en donde tanto  $\sigma_{adm}$  a la compresión simple como  $a$  son dos constantes que dependen de las características del material.

Para el acero con  $\lambda = 70-120$  y  $\sigma_{adm} = 140$  MPa, se tiene:  $a = (1 - 15) \times 10^{-4}$ .

Para la madera con  $\sigma_{adm} = 6$  MPa  $a = 6 \times 10^{-4}$

Para la fundición con  $\sigma_{adm} = 50-100$  MPa  $a = (2 - 6) \times 10^{-4}$

En la expresión (2.14) puede observarse que si  $\lambda$  es muy pequeña (vigas cortas), la fórmula se reduce a  $\sigma_{cr} = \sigma_{adm}$ ; y si  $\lambda$  es muy grande, se convierte en

$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{adm}}{a \cdot \lambda^2}$  que tiene la misma forma que la ecuación de Euler.

AISC<sup>2</sup> [1], Organización técnica que prepara especificaciones para diseñadores de acero estructural (American Institute of Steel Construction), propone ciertas formulaciones para la tensión admisible dividiendo la tensión máxima (crítica) entre el factor de seguridad adecuado. Cuando la relación de esbeltez  $L/r_g$  es grande, la tensión máxima se basa en la carga de Euler.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \quad (2.15)$$

Se tomará  $L_e$  para que sea aplicable a diversas condiciones de soportes. Se sabe que la ecuación (2.15) es aplicable cuando las tensiones son menores que el límite proporcional. Las columnas “no ideales” pueden tener tensiones residuales considerables, que pueden ser tan grandes como la mitad de la tensión de fluencia. Para una columna con estas características, el límite proporcional se alcanza cuando la tensión axial  $\sigma_{max}$  debido a la carga de compresión es igual a la mitad de la tensión de fluencia:

$$\sigma_{cr} = 0.5\sigma_y \quad (2.16)$$

Luego, la relación de esbeltez mínima para la cual es aplicable la ecuación (2.15) es:

$$\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (2.17)$$

La relación de esbeltez crítica dada por (2.17) determina la frontera entre el pandeo elástico e inelástico de columnas reales (con tensiones residuales).

Luego, de (2.17) y (2.15), para el rango elástico se tiene, en función de la relación de esbeltez:

$$\sigma_{cr} = \frac{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c^2}{2\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} \sigma_y \quad \frac{L_e}{r_g} \geq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.18)$$

Para la región de pandeo inelástico, la tensión máxima está dada por una fórmula parabólica.

$$\sigma_{cr} = 1 - \frac{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2}{2\left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c^2} \sigma_y \quad \frac{L_e}{r_g} \leq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.19)$$

<sup>2</sup> Aunque sus formulaciones son aplicadas para acero estructural se han tenido en cuenta como base de comparación en los análisis de columnas de otros tipos de acero.

Estas expresiones son graficadas (Fig. 2.10) en forma  $\sigma_{cr}/\sigma_Y$  vs  $L_e/r_g$ .

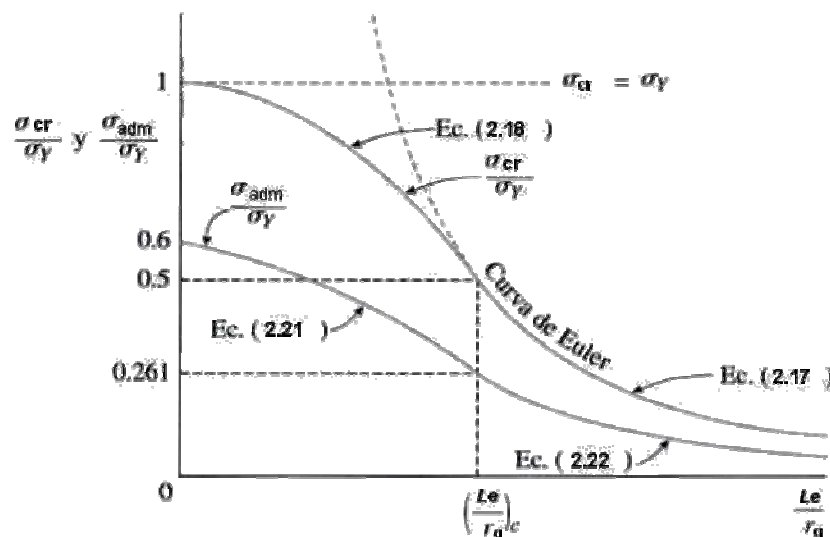
En la Fig. 2.10 se observa que la curva es una parábola con tangente horizontal en  $L_e/r_g = 0$ , donde  $\sigma_{cr} = \sigma_Y$ . En la relación de esbeltez crítica, la curva se une suavemente con la curva de *Euler* (ambas curvas tienen la misma pendiente en este punto). Así la fórmula empírica proporciona una curva de diseño que se ajusta a la forma general de las fórmulas teóricas, además es simple en su uso. La validez de estas expresiones se ha comprobado en numerosas pruebas.

Para obtener las tensiones admisibles a partir de las tensiones críticas, la AISC adoptó las siguientes fórmulas para los factores de seguridad:

$$\nu_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r_g)}{8(L_e/r_g)_c} - \frac{(L_e/r_g)^3}{8(L_e/r_g)_c^3} \quad \frac{L_e}{r_g} \leq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.20)$$

$$\nu_2 = \frac{23}{12} \approx 1,92 \quad \frac{L_e}{r_g} \geq \left(\frac{L_e}{r_g}\right)_c \quad (2.21)$$

Así, el factor de seguridad es 5/3 cuando  $L_e/r_g = 0$  y aumenta en forma gradual hasta 23/12 cuando  $L_e/r_g = (L_e/r_g)_c$ . Para relaciones de esbeltez mayores, el factor de seguridad permanece constante.



**Fig. 2.10. Tensiones máximas y admisibles para el diseño de columnas según la AISC.**



Ahora, las tensiones admisibles se obtienen dividiendo tensiones críticas entre los factores de seguridad correspondientes:

$$\sigma_{adm} = \frac{1}{\nu_1} \left[ 1 - \frac{\left( L_e / r_g \right)^2}{2 \left( L_e / r_g \right)_C^2} \sigma_Y \right] \quad \frac{L_e}{r_g} \leq \left( \frac{L_e}{r_g} \right)_C \quad (2.22)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{1}{2\nu_2} \left[ \frac{\left( L_e / r_g \right)_C^2}{\left( L_e / r_g \right)^2} \sigma_Y \right] \quad \frac{L_e}{r_g} \geq \left( \frac{L_e}{r_g} \right)_C \quad (2.23)$$

Estas tensiones admisibles están trazadas en la Fig. 2.10 en forma

$$\sigma_{adm} / \sigma_Y \quad \text{vs} \quad L_e / r_g.$$

Como síntesis, en la Tabla 2.7 se comparan las formulaciones resultantes de análisis experimentales de diversos autores mediante curvas de  $\sigma_{cr}$  vs  $L_e/r_g$  generadas para una columna se sección circular de 30mm de diámetro cuyos valores de tensión tomados son:

Tensión de fluencia  $\sigma_Y = 340\text{MPa}$ ,

Tensión última:  $\sigma_{ult} = 540\text{MPa}$ .

Tensión proporcional:  $\sigma_{pl} = 250\text{MPa}$ .

Autor	Expresiones para tensión máxima admisibles	Rango de aplicación	Curvas
Robertson	$\eta = 0.003 \frac{L}{r_g}$ $\sigma_{cr} = 0.5 \left[ \sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right] - \sqrt{0.25 \left[ \sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right]^2 - \sigma_Y \sigma_E}$	Elástico e inelástico	
Dutheil	$\eta = \frac{0.3 \sigma_Y}{\pi^2 E} \left( \frac{L}{r_g} \right)^2$ $\sigma_{cr} = 0.5 \left[ \sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right] - \sqrt{0.25 \left[ \sigma_Y + (1 + \eta) \sigma_E \right]^2 - \sigma_Y \sigma_E}$	Elástico e inelástico	
Tetmajer	$\sigma_{cr} = \sigma_{\max} = \sigma_{Rot} - a \cdot \lambda, \quad a = 3,53$ <p>para acero</p>	$60 < L/r_g < 100$	
Rankine	$\sigma_{cr} = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_{adm}}{1 + a \cdot \lambda^2}, \quad \sigma_{adm} = 140 \text{e}6, \quad a = 1 \text{e} - 4$ <p>para acero</p>	$70 < L/r_g < 120$	
AISC	$\sigma_{adm} = \frac{1}{\eta_1} \left[ 1 - \frac{(L_e/r_g)^2}{2(L_e/r_g)_C^2} \right] \sigma_Y \quad \left( \frac{L_e}{r_g} \right)_C = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_Y}}$ $\eta_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r_g)_C}{8(L_e/r_g)_C} - \frac{(L_e/r_g)_C^3}{8(L_e/r_g)_C^3}$ $\sigma_{adm} = \frac{1}{2\eta_2} \left[ \frac{(L_e/r_g)_C^2}{(L_e/r_g)^2} \right] \sigma_Y \quad \left( \frac{L_e}{r_g} \right)_C = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_Y}}$ $\eta_2 = \frac{23}{12} \approx 1.92$	$\frac{L_e}{r_g} \leq \left( \frac{L_e}{r_g} \right)_C$ $\frac{L_e}{r_g} > \left( \frac{L_e}{r_g} \right)_C$	

Tabla 2.7 Formulaciones basadas en la experimentación.

## 2.2 CAPACIDAD DE CARGA DE ACTUADORES OLEOHIDRAULICOS

Hasta ahora se han planteado diversas formulaciones tanto teóricas como experimentales en relación al pandeo de columnas. Evidentemente los cilindros oleohidráulicos no pueden considerarse columnas. Las primeras extrapolaciones de la teoría de pandeo a los cilindros oleohidráulicos parten de dos situaciones:

- Suponer que el actuador hidráulico es equivalente a una columna rígida ideal, de longitud total igual a la longitud entre los extremos (cilindro + vástago extendido), de sección transversal constante en toda la longitud, y momento de inercia igual al momento de inercia de la sección transversal del vástago.
- Suponer el actuador como columna escalonada o de sección variable, cuyas secciones y módulo de elasticidad corresponden al cilindro y vástago.

Ambas situaciones representan una simple aplicación de la idea conceptual de pandeo (teoría de Euler). Los modelos basados en estos supuestos son simples, fáciles de aplicar y muy conservadores. Se complementan con la utilización de un coeficiente de seguridad que viene justificado por el desconocimiento de las condiciones de carga reales a las que está sometido el cilindro y posiblemente por la no adecuación del modelo de Euler a las situaciones reales con que opera el cilindro.

A lo largo de los últimos 50 años, la producción científica relacionada con el estudio de la capacidad de carga de los cilindros oleohidráulicos ha sido prolífera; sin embargo, su incidencia en el mundo industrial ha sido muy limitada. Esta situación no ha pasado desapercibida por las entidades internacionales de normalización ni por algunas asociaciones de fabricantes de cilindros oleohidráulicos - maquinaria móvil. Como ejemplos podemos destacar:

- Análisis estructural de cilindros oleohidráulicos [1975], proyecto financiado por entidades como National Fluid Power Association, Mobile Equipment Manufacturers, U.S. Army Mobility Equipment Research y Development command at Ft. Belvoir, V.A. Este trabajo fue desarrollado

por la Universidad de Oklahoma (Fluid Power Research Center and structural group in the school of Civil Engineering).

- ISO Technical specification ISO/TS 13725- 2001 “Hydraulic fluid power – Cylinders- Method for determining the buckling load”.

Antes de proceder a un análisis crítico de los artículos más significativos, creemos oportuno incidir en el ámbito de la Norma ISO.

### **2.2.1 Norma ISO/TS 13725 (Hydraulic fluid power-Cylinders- Method for determining the buckling load):**

Norma desarrollada por el comité técnico ISO/TC 131, ‘*Fluid Power System*’, subcomité SC3, ‘*Cylinders*’. Iniciaron su trabajo en 1995 y publicaron la 1ª versión en 2001. La Norma plantea un método para la determinación de la carga de pandeo de los cilindros oleohidráulicos, en el rango de diámetros de pistón de 25mm a 200 mm y diámetros de vástago de 12 a 140mm.

La Norma contempla las siguientes condiciones de contorno:

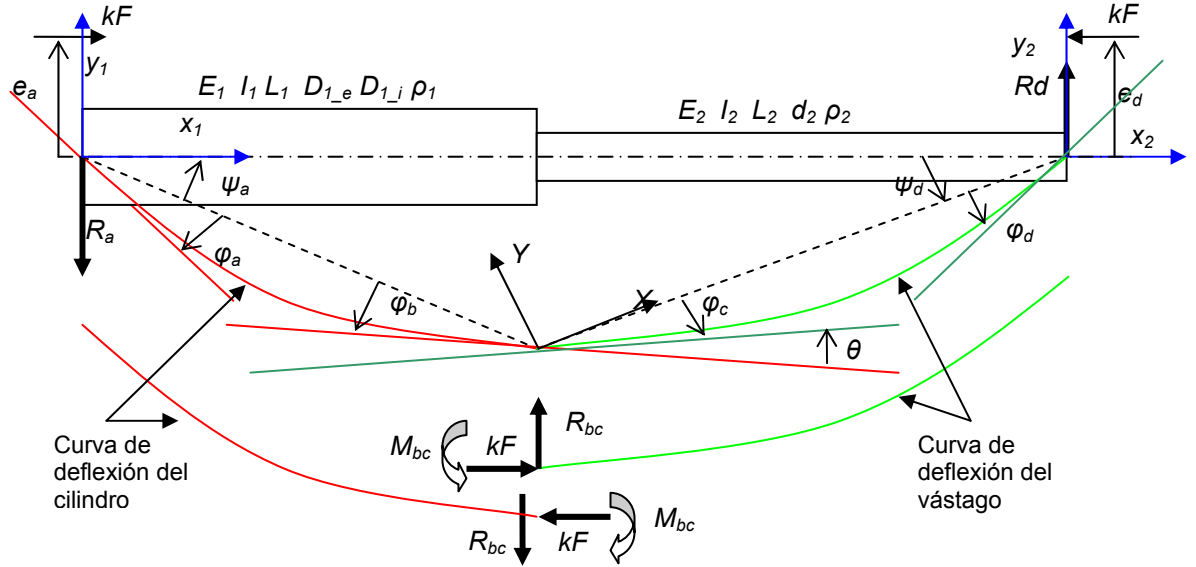
- bi - apoyado (apoyo articulado en cilindro y vástago).
- Empotrado en cilindro y articulado en vástago.
- Articulado en cilindro y empotrado en vástago.
- Empotrado en ambos extremos.
- Empotrado en cilindro y libre en vástago (montaje en voladizo).
- Empotrado en cilindro y empotrado con deslizamiento transversal en vástago

(Un análisis completo de las diferentes formulaciones además de un programa propuesto para el empleo de la Norma, se encuentran en el anexo A).

Las hipótesis de trabajo que contempla la Norma, tal como se muestra en la Fig. 2.11 son:

- El cilindro oleohidráulico es una columna escalonada que considera la geometría completa (no es equivalente a una barra).
- Excentricidad en la aplicación de la carga.
- Peso propio del actuador como carga transversal.
- Desalineamiento de los ejes como consecuencia de tolerancias de fabricación e imperfecciones iniciales.

La Fig. 2.11 muestra un esquema que resume las condiciones de carga y deformación que se presentan en un cilindro sometido a una carga excéntrica  $F$ .<sup>3</sup>



**Fig. 2.11 Esquema actuador. Diagramas de cuerpo libre de vástago y cilindro, cargas externas y de reacción, parámetros geométricos**

La Norma, inspirada en el artículo de Hoblit [14] contempla el cilindro oleohidráulico desde 2 puntos de vista:

1. Cálculo de la inestabilidad de un cilindro oleohidráulico- equivalente a una barra escalonada. El cálculo del momento flector para una columna escalonada con una deformación inicial y cargada a compresión, junto con las condiciones de contorno de los extremos del actuador y de la unión (cilindro-vástago) y las ecuaciones de equilibrio permite obtener la ecuación trascendental cuyo resultado es la carga crítica, denominada carga de pandeo.

$$kFL_3s_1s_2 - 3E_2I_2q_1c_1s_2 - 3E_2I_2q_2c_2s_1 = 0 \quad (2.24)$$

$$\text{donde} \quad s_1 = \text{sen}(q_1L_1) \quad s_2 = \text{sen}(q_2L_2) \quad c_1 = \cos(q_1L_1) \quad c_2 = \cos(q_2L_2)$$

$$q_1 = \sqrt{F/E_1I_1} \quad q_2 = \sqrt{F/E_2I_2}$$

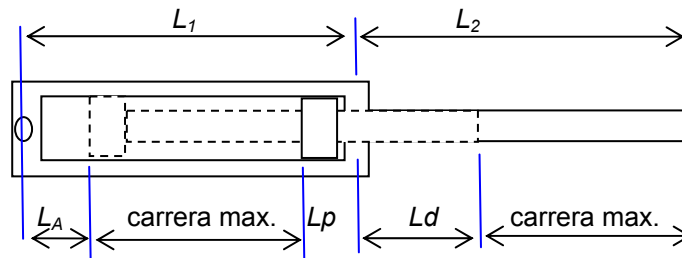
2. Cálculo de un elemento estructural constituido por dos sólidos (cilindro y vástago) interconectados mecánicamente, con deformación inicial y carga

<sup>3</sup> Los parámetros citados en esta parte respetan la nomenclatura propia de la Norma.

a compresión. El valor de la carga límite a compresión es consecuencia de que el estado de tensiones en algún punto del cilindro-vástago supera la tensión de fluencia del material (2.25).

$$\sigma_{\max} = \frac{4kF}{\pi d_2^2} + \frac{32M_{\max}}{\pi d_2^3} \quad (2.25)$$

Tomando como base los datos de la Fig. 2.12, de un cilindro articulado en ambos extremos, en la Tabla 2.8 se resumen los valores obtenidos aplicando las formulaciones planteadas en la Norma.



Especificación	Cilindro	Vástago
Diámetro (mm)	$D_{1e} = 60$ $D_{1i} = 50$	$d_2 = 30$
Longitud a carrera máxima (mm)	$L_1 = 700$	$L_2 = 600$ $L_{\text{vástago}} = 700$
$L_A$ (mm)	50	
$L_p$ (mm) = $L_3$	$L_{\text{vástago}} - L_2 = 100$	
$L_d$ (mm)	50	
Carrera máxima (mm)	550	
Módulo de elasticidad del material (GPa)	200	
Tensión de fluencia del material (MPa)	340	

**Fig. 2.12 Esquema y datos de un cilindro oleohidráulico**

REFERENCIA	CRITERIOS		CARGA crítica (kN)	
Análisis convencional (Euler)	Carga crítica de pandeo de Euler $\frac{\pi^2 E_2 I_2}{L_e^2}$		46,4	
Norma 13725 ISO/TC 131/SC 3	Carga crítica de pandeo $kFL_3 s_1 s_2 - 3E_2 I_2 q_1 c_1 s_2 - 3E_2 I_2 q_2 c_2 s_1 = 0$		74,6	
	Tensión máxima admisible $\sigma_{\max} = \frac{4kF}{\pi d_2^2} + \frac{32M_{\max}}{\pi d_2^3}$ $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{fluencia}}$	excentricidad (mm)	0	73,2
			1	64,6
			5	46,4
			10	35,5
			20	24,7

**Tabla 2.8 Cargas críticas de pandeo y admisibles empleando Euler y Norma 13725 (en todos los cálculos se ha usado factor de seguridad 1,0).**

De la Tabla 2.8 se puede observar el efecto de la excentricidad sobre la carga máxima admisible. Para valores de excentricidad bajos ( $< 5\text{mm}$ ) la carga crítica aún es mayor que la de Euler, pero esta decrece paulatinamente con el incremento de la excentricidad.

De acuerdo con la Norma, se pueden determinar las curvas de tensión crítica en función de la relación de esbeltez  $\lambda$ . Dicha esbeltez, es tomada como la relación entre la longitud equivalente del actuador y el radio de giro  $r_g$  del vástago (como elemento crítico), esto es:

$$\lambda = \frac{L_e}{r_g} = \frac{4 \cdot L_e}{d_2}, \quad \text{donde } r_g = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \frac{d_2}{4} \quad (2.26)$$

Se determinan tensiones críticas y admisibles, con base en la Norma, de cilindros oleohidráulicos de diversas longitudes, usando y manteniendo constantes, los valores de diámetros y material del cilindro analizado anteriormente. Considerando de nuevo el vástago como elemento crítico, la tensión de Euler, en este caso toma la forma:

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E_2 I_2}{A L_e^2} = \frac{\pi^2 E_2}{\left(\frac{L_e}{r_g}\right)^2} = \frac{\pi^2 E_2}{\lambda^2} \quad (2.27)$$

Para este ejemplo, la longitud de cada actuador  $L = L_1 + L_2$  será función de la carrera máxima, así:

*Cilindro:*  $L_1 = \text{carrera max.} + L_A + L_p = \text{carrera máx} + 150 \text{ mm.}$

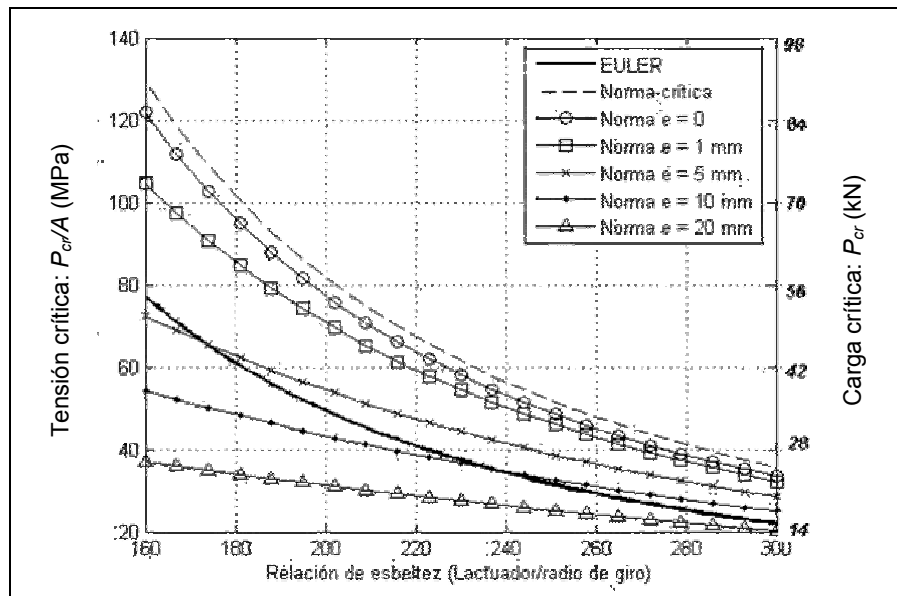
*Vástago:*  $L_2 = \text{carrera max.} + L_d = \text{carrera máx} + 50 \text{ mm.}$

$L = 2 \text{ carrera max} + 200 \text{ mm.}$

La Fig. 2.13 registra curvas de tensión crítica normal  $\sigma_{cr}$  vs esbeltez para diferentes excentricidades, además de la curva de pandeo convencional de Euler y tensión crítica de pandeo (Norma). En este caso  $P_{cr}$  es la carga que genera la tensión máxima admisible o tensión de fluencia. La figura presenta los valores de tensión en MPa y de carga en kN.

De nuevo, según la Fig. 2.13 es notable el efecto de la excentricidad sobre la carga máxima admisible del actuador. Para actuadores cortos (de relación de esbeltez baja) los efectos de excentricidad son más críticos, mientras que en

actuadores largos disminuye tal influencia. Según la Norma, en relaciones de esbeltez bajas (menores de 220), excentricidades superiores a 10 mm, generarían cargas críticas menores que la carga de Euler convencional en este tipo de actuadores.



**Fig. 2.13 Tensión crítica a distintas excentricidades, tensión de Euler y crítica de pandeo (Norma) vs relación de esbeltez  $\lambda$ .**

La Norma involucra dentro de su análisis, además del peso propio del actuador, la excentricidad como factor influyente en su capacidad de carga, que, aunque esquemáticamente plantea valores diferentes en vástago y cilindro, la Norma iguala estos valores de excentricidad en las formulaciones propuestas, actuantes además en el mismo sentido (Fig. 2.11).

En las aplicaciones hidráulicas las excentricidades pueden diferir en los puntos de apoyo de vástago y cilindro tanto en valor como en sentido. La Norma no valora esta situación y deja de lado otros aspectos importantes como son los momentos debido a fricción en los puntos de apoyo, imperfecciones iniciales por desgaste y juegos en juntas, que podrían influir sobre la capacidad de carga de los cilindros.

A continuación se hace un análisis crítico de aquellas publicaciones técnicas que hemos seleccionado por su interés conceptual.



### 2.2.2 Publicaciones relevantes en relación a la capacidad de carga de actuadores oleohidráulicos.

- **(Hoblit, F. 1950).**

#### ***Critical buckling for hydraulic actuating cylinders [14]***

Como se ha mencionado, este artículo se considera como el punto de partida en el cual se apoyaron los autores de la Norma ISO. En él se discute la influencia del aceite a presión en el interior del tubo. Destaca que es incorrecto plantear el estudio de la capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico suponiendo que la presencia de fluido no tiene mas influencia que la simple aplicación de una fuerza sobre el pistón equivalente al producto de la presión por la superficie del pistón. Por el contrario, demuestra que si se consideran todas las fuerzas generadas por el fluido sobre el tubo-cilindro del actuador (considerado el tubo con una pequeña deformación elástica, a semejanza del planteamiento del modelo de Euler), éste (el tubo-cilindro lleno de fluido a presión) es equivalente a una columna que tiene el mismo momento de inercia del tubo-cilindro. Hoblit considera esta equivalencia como el camino más simple y adecuado.

Es el primer autor en proponer la importancia de calcular por un lado la carga crítica o de inestabilidad de cilindros oleohidráulicos y por otro la carga límite considerando el cilindro oleohidráulico como un elemento estructural, sometido a cargas de flexión y compresión. No obstante, deja al usuario la libertad de usar un resultado u otro.

- **Seshasai, K. L, Dawkins, W.P., Iyengar, S.K. (1975)**

#### ***Stress Analysis of Hydraulic Cylinders [19]***

Presentan el análisis de la capacidad de carga de cilindros oleohidráulicos, ubicados verticalmente, con apoyos articulados sin rozamiento. Involucran la variación del ángulo de imperfección en el punto de intersección, en función de la carga axial aplicada. Tiene en cuenta la presión del fluido dentro de la cámara como fuente de generación de tensiones adicionales en el tubo-cilindro.

Plantean que un cilindro oleohidráulico funciona correctamente si las tensiones y deflexiones en sus componentes no exceden los límites admisibles. Las

tensiones y deflexiones son el resultado de los efectos combinados de carga axial y momento flector, así como la presión hidráulica en el cilindro.

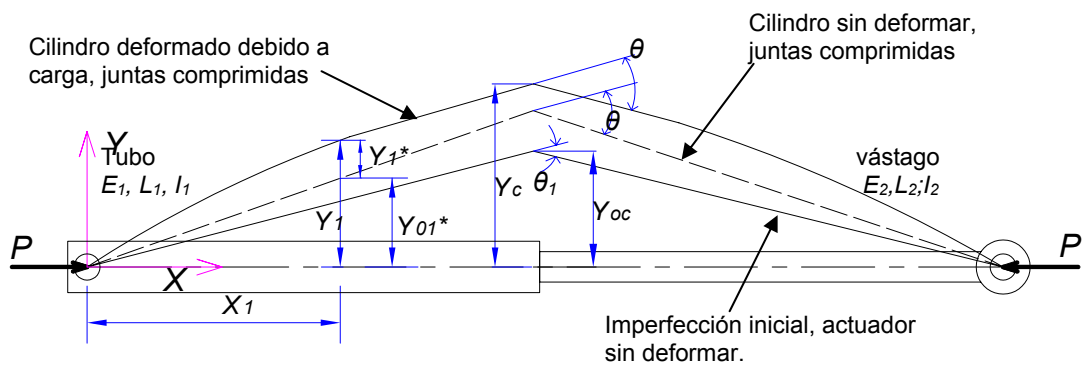
Trata al cilindro hidráulico como un elemento estructural y menciona, pero no incluye en su modelo, otros factores que pueden reducir la capacidad de carga, tales como: excentricidad de carga, excentricidad en la articulación como consecuencia de una irregularidad en el montaje y/o su fabricación, concentración de tensiones, rozamiento en las articulaciones, fatiga y efectos dinámicos.

Inicialmente, si consideramos las hipótesis de Seshasai, es decir: el cilindro se considera como una columna escalonada con módulo de elasticidad y momentos de inercia diferentes, para cilindro<sub>1</sub> y vástago<sub>2</sub>, se obtiene la ecuación trascendental (2.12), denominada *ecuación de las tangentes*.

$$\frac{\tan(k_1 L_1)}{k_1} + \frac{\tan(k_2 L_2)}{k_2} = 0 \quad (2.28)$$

Donde  $k_i = \sqrt{P/E_i I_i}$ ,  $L_1$  y  $L_2$  longitudes de cilindro y vástago.

La Fig. 2.14 presenta un esquema general del planteamiento hecho por los autores.



**Fig. 2.14 Configuración de cilindro deformado bajo carga axial [17]**

Los autores analizan en profundidad la interconexión cilindro-vástago. Consideran una imperfección inicial entre vástago y cilindro debido a juegos por fabricación y montaje. Esta imperfección genera un ángulo  $\theta_1$ . Al aplicar carga las juntas se comprimen hasta generar en el cilindro una deflexión  $Y_{01}^*$ . En este momento se forma un ángulo  $\theta$  entre vástago y cilindro. Hay un momento en que

las juntas difícilmente comprimen más, momento a partir del cual empieza a deformarse vástago y cilindro hasta  $Y_1$ . Los autores plantean las ecuaciones de la elástica para la deformación neta  $Y_1^*$ . Los autores determinan una constante elástica de rigidez en la conexión  $K_c$  que depende de las dimensiones y propiedades de elasticidad de juntas y anillos guía. La expresión (2.29) determina el ángulo  $\theta$  debido a imperfección inicial y conexión elástica es:

$$\theta = \theta_1 + K_c \cdot P \cdot Y_c \quad (2.29)$$

Planteando las ecuaciones de equilibrio y aplicando condiciones de contorno, se determinan las curvas de deflexión  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  para cilindro y vástago respectivamente.

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \frac{\sin(k_1 x)}{K \sin(k_1 L_1)} \theta & 0 \leq x \leq L_1 \\ Y_2(x) &= \frac{\sin[k_2(L - x)]}{K \sin(k_2 L_2)} \theta & L_1 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (2.30)$$

Donde  $K = \frac{k_1}{\tan(k_1 L_1)} + \frac{k_2}{\tan(k_2 L_2)}$ .

- **Bennet, M. C., Case, J. I. (1978)**  
***A Calculation of Piston rod Strength [20]***

Considera el cilindro oleohidráulico como elemento estructural sometido a distintas cargas, este elemento estructural está compuesto de un tubo cilindro que considera indeformable y un vástago que lo trata como barra elástica. Se diferencia de los autores anteriores en que además de las fuerzas de compresión y el peso propio del actuador, incluye un momento  $M_F$  debida a la interacción mecánica (rozamiento) en la articulación, habida cuenta que considera que en la mayoría de aplicaciones se produce una rotación del pasador de la articulación.

Tanto este momento, como la acción del peso producen efectos aditivos sobre la deflexión y por ende las tensiones sobre el vástago.

De esta manera, plantea las ecuaciones (2.31) para los momentos flectores actuantes sobre el actuador (ver Fig. 2.15).

$$\begin{aligned}
M_f &= -\frac{F\mu d_3}{2} && \text{Debido a fricción en articulación} \\
M_A &= -F \left[ h \left( \frac{L_6 + x}{L_6 + L_3} \right) - \frac{cx}{L_3} - Y \right] && \text{Debido a carga axial } F \\
M_W &= -W(L_3 - x) && \text{Debido al peso propio}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción en el punto de apoyo del vástago y  $W$  el peso propio del actuador. Usando estas expresiones de momento, y aplicando las ecuaciones de equilibrio, los autores determinan la ecuación (2.32) para la deflexión del vástago.

$$\begin{aligned}
y &= \left( \frac{hL_6}{L_6 + L_3} + \frac{\mu d_3}{2} + \frac{WL_3}{F} \right) [1 - \cos(kx)] + \left( \frac{2c}{L_3} - \frac{h}{L_6 + L_3} + \frac{W}{F} \right) \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right] + \\
&+ \left( \frac{h}{L_6 + L_3} - \frac{c}{L_3} - \frac{W}{F} \right) x
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Donde:

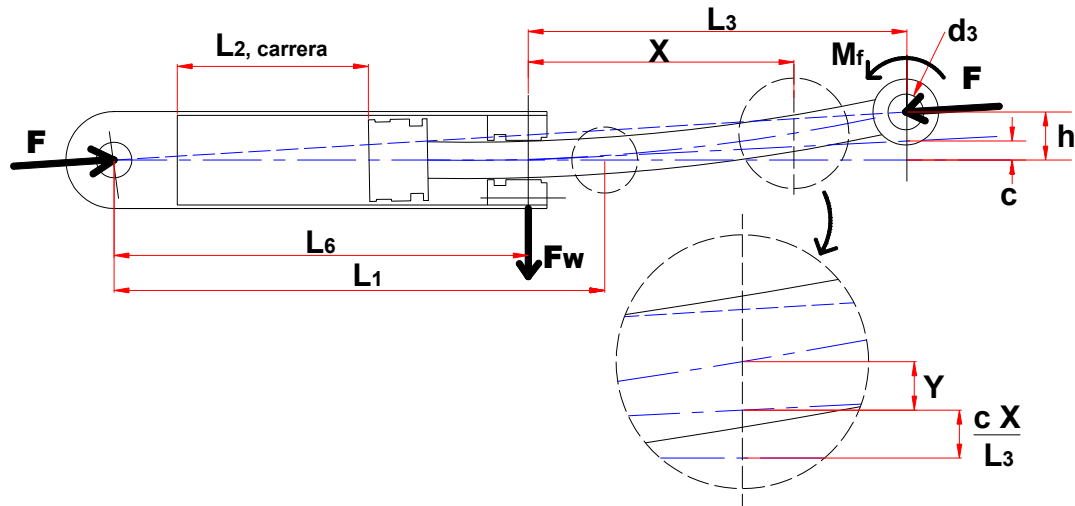
$$k = \sqrt{F/EI}$$

$$h = \left\{ \left( \frac{\mu d_3}{2} + \frac{WL_3}{F} \right) [1 - \cos(kx)] + \left( \frac{2c}{L_3} + \frac{W}{F} \right) \left[ \frac{\sin(kL_3)}{k} \right] - \frac{WL_3}{F} \right\} \left[ \frac{L_6 + L_3}{L_6 \cos(kL_3) + \frac{\sin(kL_3)}{k}} \right]$$

La Fig. 2.15 muestra un esquema del cilindro deformado propuesto por Bennett [18], el cual muestra una posición inicial (vástago no deformado) debida a las imperfecciones de montaje y juego en juntas (distancia  $c$  en el extremo del vástago de la figura). Una vez se aplica carga, el vástago se deforma hasta una distancia  $h$  (Fig. 2.15).

Entre los resultados destacables de las pruebas en este artículo cabe mencionar lo siguiente:

- Existe un mayor acercamiento entre resultados teóricos y experimentales en pruebas de cilindros sin par de fricción en extremo (sin rotación de pasador).
- Se detectaron mayores niveles de tensión en el vástago cuando se aplicó momento de fricción en el punto de apoyo (rotación de pasador).



**Fig. 2.15 Esquema de análisis propuesto por Bennet**

Como conclusión importante Bennett afirma que la interacción entre los elementos que configuran la articulación (rotación del pasador) tiene un efecto importante sobre el estado de tensiones del vástago. Esta situación suele reproducirse en cilindros oleohidráulicos incorporados a los mecanismos para el accionamiento de aperos de maquinaria móvil. Con esto, Bennett aconseja que una posible manera de incrementar la capacidad de carga sería utilizar cojinetes con un coeficiente de fricción bajo (según sus datos experimentales  $< 0,146$ ).

Desde el punto de vista experimental, los trabajos de Bennet se diferencian de los demás por su interés en evaluar la influencia de la rotación del pasador. Menciona que la tensión máxima en algún punto del vástago sin rotación del pasador, es mucho mayor que la observada cuando ensaya un cilindro hidráulico en el cual provoca una rotación del pasador situado en el extremo del vástago. El montaje experimental que utiliza le impide contrastar estos resultados, habida cuenta que durante los ensayos siempre tiene presente una ligera rotación de los pasadores.

Por último concluye que en aquellas aplicaciones donde no hay movimiento de rotación del pasador, la capacidad de carga del cilindro oleohidráulico debe calcularse introduciendo como dato que el par de rozamiento es nulo en la articulación.

- **Ravishankar, N. (1980)**

### ***Finite Element Analysis of hydraulic Cylinders [13].***

La característica diferencial de este estudio es el empleo de un método de estudio por elementos finitos. El cilindro oleohidráulico es modelado como un conjunto de elementos estructurales con un muelle rotacional ficticio en el tapón guía con el objetivo de considerar el efecto de las juntas y guías en la interfase vástago-cilindro.

El modelo permite calcular tensiones, deformaciones y la estabilidad del cilindro. La capacidad de carga viene definida cuando o bien se supera la carga crítica correspondiente a la condición de inestabilidad del cilindro oleohidráulico o la tensión en algún punto del cilindro hidráulico es superior a la tensión de fluencia del material. El modelo no ha sido contrastado experimentalmente.

- ***Baragetti S., Terranova A. (2001).***

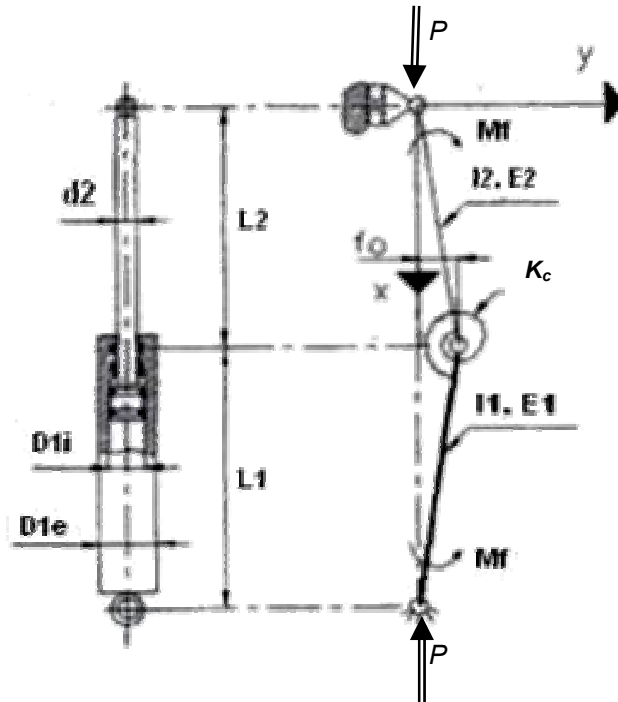
#### ***Bending behaviour of double-acting hydraulic actuators [15]***

Una vez mas, el cilindro oleohidráulico inicialmente se considera como una columna escalonada y bi-articulada, encontrando que para la condición de inestabilidad el valor de la carga crítica viene definida por la ecuación (2.33).

En esta ecuación se introduce un valor  $K_c$  de rigidez del comportamiento elástico de la conexión vástago-cilindro y cuyo valor depende del material y de los parámetros de montaje de las juntas y anillos guía.

$$K_c \cdot k_1 \sin(k_2 L_2) \{ \cos(k_1 L_2) + \sin(k_1 L_2) \tan[k_1 (L_1 + L_2)] \} + \\ + \{ \sin(k_1 L_2) - \cos(k_1 L_2) \tan[k_1 (L_1 + L_2)] \} \{ P \sin(k_2 L_2) - K \cdot k_2 \cos(k_2 L_2) \} = 0 \quad (2.33)$$

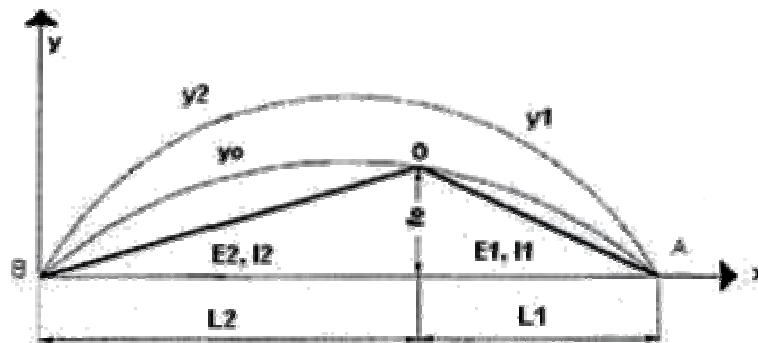
Después de conocida la carga crítica, consideran que el cilindro oleohidráulico es un elemento estructural sometido a compresión y flexión en el que involucran además la influencia de juegos, imperfección inicial ( $f_0$ ) y momentos de fricción en los apoyos ( $M_f$ ) (Fig. 2.16).



**Fig. 2.16. Modelo aproximado real de un actuador hidráulico de doble efecto [15]**

Con el objetivo de simplificar el tratamiento matemático proponen modelar la deflexión inicial  $y_0$  del cilindro oleohidráulico mediante una función sinusoidal (Fig. 2.17), según la expresión (2.34).

$$y_0(x) = \frac{f_0}{\sin\left(\frac{\pi}{L_1/L_2 + 1}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{L_1 + L_2} x\right) \quad (2.34)$$



**Fig. 2.17. Configuración inicial y deformada del actuador**

Los autores plantean las expresiones (2.35) para determinar las tensiones generadas en vástago y cilindro, con base en las deflexiones calculadas  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{[Py_1(x) - M_f]D_{1e}}{I_1 \cdot 2} & a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \sigma_2 &= \frac{[Py_2(x) - M_f]d_2}{I_2 \cdot 2} & 0 \leq x \leq L_2\end{aligned}\quad (2.35)$$

El lector observará que consideran únicamente el efecto de flexión para vástago y cilindro. El vástago, a diferencia del tubo, soporta tensiones debidas a la combinación de los efectos de flexión y compresión generados, mientras que el tubo-cilindro soporta tensiones debidas a flexión además de las generadas debido a la presión del fluido en su interior. Si se considera el vástago como elemento crítico del sistema, la tensión a calcular debería ser:

$$\sigma_2 = \frac{4P}{\pi d_2^2} + \frac{[Py_2(x) - M_f]d_2}{I_2 \cdot 2} \quad 0 \leq x \leq L_2 \quad (2.36)$$

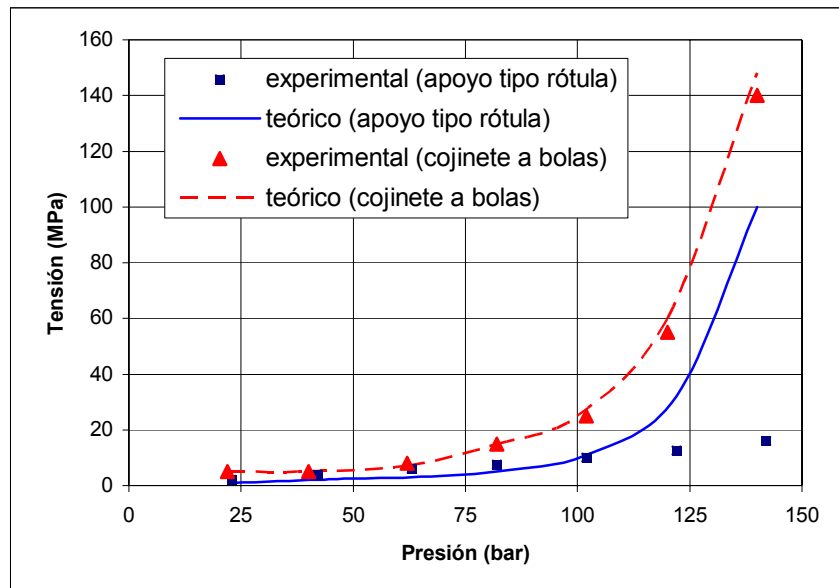
Considerando de esta manera ambos efectos: compresión y flexión. Para calcular la carga máxima admisible, se deberá comparar la tensión máxima calculada, con la tensión de fluencia. La tensión máxima se determinará con el valor de deflexión máxima  $y_{2 \max}$ .

En cierto modo el artículo de Baragetti y Terranova es una versión mejorada de los trabajos anteriores. A destacar la hipótesis de utilizar momentos debidos a la fricción iguales en valor y dirección (en relación al efecto sobre el actuador) en ambos puntos de apoyo (estos momentos son considerados como datos de entrada al problema). Esta hipótesis es muy restrictiva, si se considera la presencia de fricción en los puntos de apoyo, lo cual provocará momentos proporcionales a la carga aplicada y al coeficiente de fricción en cada apoyo. Los momentos además, deberían ser independientes en valor y dirección.

En la Fig. 2.18 se muestra la contrastación del modelo teórico propuesto y los resultados experimentales del cilindro con los datos:

Dentro de las conclusiones de su trabajo es de resaltar que los resultados experimentales y analíticos se acercaron solo cuando el actuador tenía rodamiento de bolas en sus extremos (condición de fricción prácticamente nula). Para cilindros oleohidráulicos con rodamientos tipo rótula (fricción no nula) se presentó concordancia solo para cargas bajas, la diferencia incrementó cuando la carga aproximaba a la máxima permisible.





**Fig. 2.18 Comparación entre los resultados experimentales y del modelo teórico propuesto por Baragetti []**

- **Yishou Tao, Wenwei Wei.**

***Stability anlysis for hydraulic hoist cylinder of shiplock miter gate (2004)***

El punto diferencial en relación a los demás estudios radica en considerar el peso propio del cilindro oleohidráulico como cargas distribuidas de cilindro y vástago. Destaca la importancia de la deformación inicial. A pesar de que comenta la bondad del modelo cuando lo contrasta con resultados experimentales, el artículo no aporta ni método de ensayo ni resultados experimentales.

### 2.2.3 Capacidad de carga en cilindros telescópicos

- **Chai Hong Yoo, (1986).**

***Column loadings on telescopic power cylinders [15]***

Se presentan las bases para el desarrollo de un método general para predecir la carga crítica de cilindros telescópicos, basado en el análisis por elementos finitos. Incluye el comportamiento a flexión de cilindros y vástagos, imperfecciones iniciales en interfase vástago-cilindro, excentricidades de carga

aplicada, otras condiciones de soporte diferentes al bi-apoyado, y carga lateral, debido a peso muerto de cilindro y aceite. El autor plantea la imperfección inicial en actuadores debido a la elasticidad en juntas y anillos guía. Afirma, al igual que otros autores, que el sistema vástago-cilindro no es rígido, no hay linealidad geométrica, que el comportamiento dista mucho del concepto de pandeo de Euler y que la tensión y deflexión incrementan con la carga aplicada sobre el cilindro. Plantea como carga crítica (de inestabilidad) de un actuador telescópico:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E}{L} \frac{1}{\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} + \dots + \frac{L_n}{I_n}} \quad (2.37)$$

Donde  $L$  es la longitud total y  $L_i$ ,  $I_i$  es la longitud y momento de inercia de cada cilindro del actuador.

Se destaca que las investigaciones analíticas y experimentales realizadas sobre cilindros convencionales demostraron que las capacidades de carga fueron significativamente más bajas que las obtenidas en análisis de pandeo simple de sistemas idealizados. Los autores advierten que, aunque la mayoría de fabricantes usan un factor de 4 en la carga crítica del cilindro asumido como columna escalonada, manteniendo al cilindro en la zona elástica, ocurre que después de uso repetido, debido a tolerancias entre vástago y cilindro, aumenta la deflexión inicial, disminuyendo la capacidad de carga del cilindro considerablemente.

- **Ohtomo, T., Sugiyama, Y. (2002)**  
***Euler buckling test of four-staged, 6 meter-long telescopic cylinder-columns [18].***

Es de resaltar que el trabajo desarrollado en esta publicación, tiene un aporte experimental destacable, pero solo para cilindros telescópicos. Realizan pruebas de pandeo en cilindros oleohidráulico telescópicos de 4 etapas. Longitud total extendida de 5,6 m obteniendo una carga crítica cercana a 21 kN, muy similar a la carga crítica calculada. Esta carga es valorada con la ecuación de Euler, reemplazando el término  $EI$  por un valor de rigidez  $EI$  experimental.

Concluyen que las conexiones vástago-cilindro reducen la rigidez de flexión en un 10 % en relación con la rigidez de flexión nominal, reduciendo la carga de pandeo en igual proporción. La carga de pandeo teórica modificada, obtenida por la aplicación de rigidez experimental concuerda bien con la carga de pandeo experimental. Tal publicación referencia el “**método de Southwell**” ([3] Pgs. 194-213) empleado por los autores para realizar ensayos en cilindros oleohidráulicos. Aunque es un método desarrollado inicialmente para pruebas de pandeo en columnas, se vuelve útil si se pretende determinar cargas de Euler para cilindros oleohidráulicos esbeltos, mediante pruebas no destructivas. Precisamente por su carácter no destructivo, consideramos de interés hacer una pequeña descripción del método.

El método consiste en construir un gráfico de **deflexión vs deflexión/carga** aplicada; tal gráfico debe corresponder a una recta (dependiendo de la precisión de la prueba) cuya pendiente es la carga de pandeo. Con esto se logra evitar el colapso total del elemento de ensayo para conocer dicha carga.

Teóricamente, la ecuación de equilibrio, que describe el comportamiento de columnas con imperfecciones iniciales, tiene la forma ([3] pg. 194):

$$y^{IV} + k^2 y'' = -k^2 y_0'' \quad (2.38)$$

donde  $y$  es la deflexión medida,  $y_0$  la deflexión inicial y  $k$  es  $P/EI$  donde  $P$  es la carga real aplicada.

Las condiciones iniciales son:  $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$  (columna articulada en sus extremos). Las deflexiones  $y$  e  $y_0$  se puede aproximar por una serie de Fourier, de la forma:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad y \quad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.39)$$

Derivando y reemplazando en (2.38) se llega a:

$$y_n = \left[ \frac{n^2 \pi^2}{k^2 L^2} - 1 \right]^{-1} y_{0n} = \left[ \frac{n^2 P_E}{P} - 1 \right]^{-1} y_{0n} \quad (2.40)$$

siendo  $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  la carga de Euler. Sustituyendo en (2.39) se llega a:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \left[ \frac{n^2 P_E}{P} - 1 \right]^{-1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.41)$$

La deflexión máxima  $Y = y(L/2)$  es por lo tanto:  $Y = Y_1 - Y_3 + Y_5 - \dots$

Donde  $Y_n$  está dada por (2.40). Cuando la carga se aproxima a la carga de pandeo:

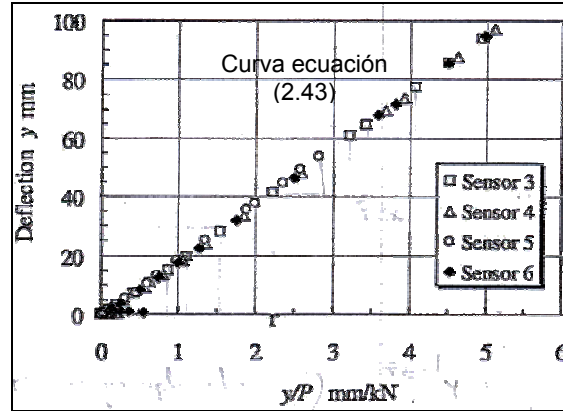
$$Y \cong Y_1 = Y_{01} \left[ \frac{P_E}{P} - 1 \right]^{-1} \quad (2.42)$$

Y el modo fundamental predomina. Por lo tanto, como  $P \rightarrow P_E$ , el componente de imperfección que representa el modo de pandeo es el que es primeramente magnificado. Por lo tanto:  $Y_0 \approx Y_{01}$ .

De esta manera, se llega a la conclusión que la gráfica experimental de la deflexión vs deflexión/carga debe ajustarse a una ecuación lineal:

$$Y = P_E \frac{Y}{P} - Y_0 \quad (2.43)$$

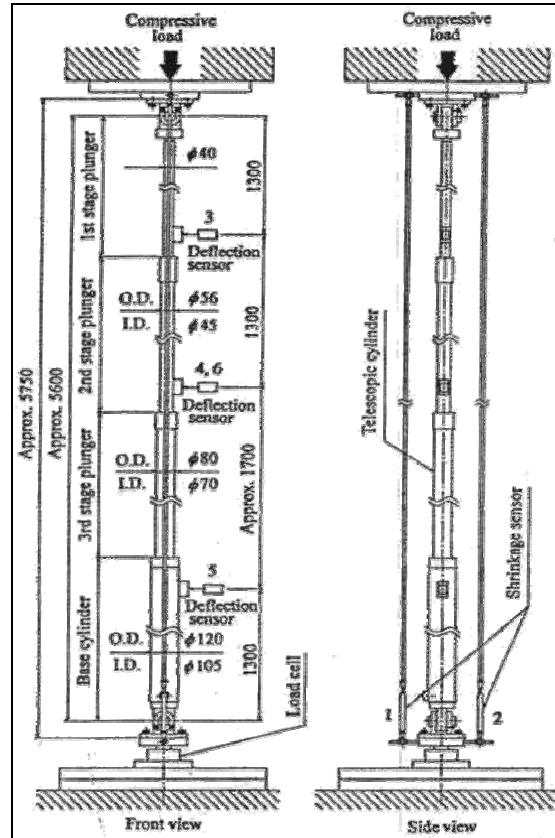
La Fig. 2.19 muestra la gráfica obtenida en una prueba de pandeo a un cilindro hidráulico telescópico [16], con mediciones tomadas de 4 sensores en distintos puntos del actuador. Luego, la pendiente resultante de la curva obtenida en esta figura corresponde a la carga crítica de pandeo de Euler  $P_E$  del actuador (Fig. 2.20).



**Fig. 2.19 Determinación experimental de carga de pandeo para el actuador mostrado en Fig. 2.20 [16]**

Es de resaltar que la carga crítica determinada a partir del “método Southwell” concuerda muy acertadamente con la carga experimental de pandeo en cilindros muy esbeltos como es el caso de los cilindros telescópicos. Es por esto que resulta limitada su aplicabilidad en cilindros típicos de esbeltez relativamente baja. Este método toma importancia debido a la posibilidad de encontrar la carga crítica de pandeo en cilindros esbeltos, sin llegar experimentalmente hasta este

valor (es decir, evita el colapso total del cilindro), permitiendo evitar el coste que implicaría realizar pruebas destructivas en cilindros oleohidráulicos.



**Fig. 2.20 Prueba de pandeo en un actuador hidráulico telescópico, sensores de desplazamiento ubicados a lo largo del actuador [7]**

### 2.3 Conclusiones

Después de revisados los artículos más relevantes (Tabla 2.9), se puede concluir que la capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico, en la mayoría de los casos, viene determinada por su capacidad de resistencia como elemento estructural sometido a cargas de compresión, a la que se deben añadir cargas de flexión como consecuencia de: peso propio, imperfección o desalineamiento debido a tolerancias de fabricación y defectos de montaje, excentricidad de la carga, excentricidad en las articulaciones como consecuencia de una irregularidad en el montaje y/o su fabricación, rozamiento en las articulaciones, fatiga y efectos dinámicos. Sin embargo ninguno de los modelos propuestos contempla todas estas situaciones simultáneamente.

De forma muy resumida podemos decir:

1. **Con relación a la desalineación vástago-cilindro.** Seshasai plantea acertadamente como modelar la interacción vástago-cilindro. Los detalles aportados por Baragetti complementan el modelo. Cualquier intento de ampliar más detalladamente esta interacción pueden llevarnos a un nivel de complejidad sin variación significativa de los resultados.
2. **Con relación a la excentricidad (debida a la carga o debida a las articulaciones).** Todos coinciden en considerar la excentricidad como un par activo aplicado en los apoyos. Esta interpretación ya fue contrastada al estudiar columnas cargadas concéntricamente.
3. **Con relación a los vínculos del cilindro oleohidráulico y el mecanismo que acciona (condiciones de contorno).** Cabe destacar que la mayoría de los documentos técnicos estudiados, y en particular la Norma ISO contemplan estos vínculos como elementos ideales. También en la mayoría de estos estudios se toma como patrón de referencia un cilindro oleohidráulico bi-articulado, y se menciona que para cualquier otra condición de contorno (por ejemplo cilindro oleohidráulico bi-empotrado) el cálculo de la capacidad de carga debe ser tratado como una simple extrapolación de la modelización propuesta.  
  
Experimentalmente se ha puesto de manifiesto que la capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico depende en gran medida de las condiciones de contorno impuestas por los extremos. Para el caso real de un cilindro oleohidráulico bi-articulado todos estaremos de acuerdo de que en los extremos hay una interacción entre los elementos de las articulaciones que se manifiestan como un par de rozamiento. En efecto, Baragetti en su último trabajo [17] propone incluir en su modelo, como dato de entrada, un momento debido a la fricción en ambos extremos; sin embargo, su modelo discrepa notablemente de sus resultados experimentales.
4. **En relación a la fatiga.** Según nuestras fuentes de información nadie ha analizado la influencia que puede tener el daño acumulado sobre la capacidad de carga de un cilindro oleohidráulico.

5. **En relación al ensayo experimental para la determinación de la capacidad de carga cilindros oleohidráulicos.** Todos los artículos que hemos analizado no valoran experimentalmente el límite de carga admisible, ya que su determinación supone necesariamente un ensayo destructivo de elevado coste. La mayoría de ellos evalúan únicamente, la evolución de la tensión en función de la carga aplicada, bajo diferentes condiciones de carga y de contorno.

A la vista de los comentarios expuestos anteriormente, en el siguiente capítulo se pretende profundizar en el estudio de la capacidad de carga de los cilindros oleohidráulicos, teniendo en cuenta su interacción con el mecanismo que acciona y la influencia del daño acumulado, como consecuencia de su reiterado uso.

La Tabla 2.9 presenta un resumen de los factores influyentes en la capacidad de carga de los cilindros, que las diferentes publicaciones (en orden cronológico) han considerado de alguna manera dentro de sus análisis.

En la Tabla se han empleado comentarios cortos que indican:

*Lo considera:* cuando el autor en la publicación, involucra el factor dentro de los análisis teóricos, mediante un modelo matemático.

*Lo plantea:* Cuando simplemente el autor plantea el factor dentro de sus considerandos, pero no lo analiza dentro de ningún modelo.

Publicaciones	año	Factores influyentes en la capacidad de carga de los actuadores				
		Imperfección inicial	Momentos de fricción	Excentricidad en la carga	Peso propio del cilindro	fluido
Crítical buckling for hydraulic actuating cylinders [12] (Fred Hoblit,)	1950	Lo plantea				Lo considera
Stress Analysis of Hydraulic Cylinders [17]. (K.L Seshasai)	1975	Como dato de entrada				Lo considera
A Calculation of Piston rod Strength [18] (M.C. Bennett)	1978	Como dato de entrada	Solo en apoyo vástago		Como reacción en apoyo vástago	
Finite Element Analysis of Hydraulic Cylinders. (Ravishankar, N.)	1980	Plantea constante de rigidez en conexión			Como carga distribuida.	
Column loadings on telescopic power cylinders [13] (Chai Hong Yoo)	1986	Mediante FEM (Mét de ele finitos)		Lo plantea (FEM)	Lo plantea (FEM)	
Bending behaviour of double-acting hydraulic actuators [15] (S. Baragetti)	2001	Def. inicial como senoide	Constantes para toda carga			
Norma ISO/TS 13725 [11] (ISO/TC131 subcom. SC3)	2001			Las considera	Lo considera	Lo considera
Stability analysis for hydraulic hoist cylinder of shiplock miter gate. (Yishou T., Wenwei, W.)	2004	Lo considera			carga distribuida en tubo y vástago	Lo considera

**Tabla 2.9 Resumen de los factores que influyen en la capacidad de carga de un actuador, considerados por diferentes publicaciones** (cuadros en blanco: factor no considerado)



